CENTRE DE GESTION
DE LA FONCTION PUBLIQUE TERRITORIALE DU RHÔNE

CONCOURS ou EXAMEN

donnant accès à l'emploi de :

INGENIEUR

à titre interne ☒ (1)

à titre externe ☐ (1)

au titre du troisième concours ☐ (1)

Spécialité Prévention et gestion des risques

Épreuve de **MATHEMATIQUES**

Date de l'épreuve 14/06/2017

cache candidat.

Colonne réservée à l'Administration

Numéro de correction

Numéro d'anonymat

Note attribuée (réservé au jury)

8/10

Visa du jury ou de la Commission de Surveillance

(1) Cocher la case correspondante

Problème 2 :

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-3&3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}i\\j\\k\end{pmatrix}\qquad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Question 1 :

a) $\lambda \in \mathbb{R}$

Démontrer que :

$\det(M-\lambda I) = (1-\lambda)^3$

$$M-\lambda I=\begin{pmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\1&-3&3-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det(M-\lambda I) = -\lambda\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-3&3-\lambda\end{vmatrix} - 0\times\begin{vmatrix}1&0\\-3&3-\lambda\end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix}1&0\\-\lambda&1\end{vmatrix}$$

$$\det(M-\lambda I) = -\lambda\times(-\lambda\times(3-\lambda)+3] + 1$$

$$\det(M-\lambda I) = -\lambda[-3\lambda+\lambda^2+3]+1+\lambda = 3\lambda^2-\lambda^3-3\lambda+1$$

$$\det(M-\lambda I) = -\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1$$

$$(1-\lambda)^3 = (1-\lambda)\times(1-\lambda)\times(1-\lambda) = [1+\lambda^2-2\lambda]\times(1-\lambda)$$
$$= 1+\lambda^2-2\lambda-\lambda-\lambda^3+2\lambda^2 = -\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1$$

[redacted]

Donc $\det(M-\lambda I) = (1-\lambda)^3$

b) Comme $\det(M-\lambda I) = (1-\lambda)^3$, les solutions $\det(M-\lambda I)=0$ sont les solutions de $(1-\lambda)^3$ soit une unique solution

$1-\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$

$\lambda = 1$ est donc la seule valeur propre de M

On recalcule avec $\lambda = 1$ $M - \lambda I = M - I$

$$M - \lambda I = M - 1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Le sous-espace propre doit répondre aux condition suivante

$$\left.\begin{aligned} -x+y &= 0 \\ -y+z &= 0 \\ x-3y+2z &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x = y \\ &y = z \\ &x-3y+2z=0 \rightarrow x=y=z \end{aligned}$$

La solution est une <u>droite de vecteur</u> $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

c) M est inversible si $\det M \neq 0$

$\det M = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, <u>donc M est inversible</u>

La matrice M n'est pas diagonalisable, car le sous-espace propre est de dimension 1, alors que nous avons une valeur propre triple. La matrice aurait été diagonalisable si nous avions pu associer 3 vecteurs propres (si x, y, et z étaient indépendants dans l'inéquation.

Question 2 :

Soit $e_1 = i + j + k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad e_2 = 2i + j = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) $B' = (e_1, e_2, i)$ est une base de $\mathbb{R}_3$ si e_1, e_2 et i ne sont pas colinéaires : $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma i = 0$ a pour unique solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma i = \begin{cases} (1)\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ (2)\ \alpha + \beta = 0 \\ (3)\ \alpha = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \text{si } \alpha = 0 \text{ alors } \beta = 0 \ (2) \\ \text{alors } \gamma = 0. \end{cases}$

La seule solution est $\alpha = \beta = \gamma = 0$ donc B' est une base de $\mathbb{R}^3$

b) L'application de f dans B'

$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2i & j & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i - 2i + i & j - j & k \\ 2i - 2i & & \end{pmatrix}$

f dans B' $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & & \end{pmatrix}$

$i = e_3$
$j = e_2 - e_3$
$k = e_1 - e_2 + e_3$

$\Big($

c) $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$PNP^{-1} = M$

avec la matrice de passage correspondant à B' exprimée dans (i,j,k) (e_1, e_2, i)

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Question 3</u>

a) $f^n(e_2) = -ne_1 + e_2$

$M(e_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2$

$M^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$

$-e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$M^2(e_2) = -2 \times e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$M^2(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-3 \\ 6-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \times e_1 + e_2.$

<u>Hypothèse :</u> $F^n(e_2) = -n e_1 + e_2$

- Initialisation, on vérifie au rang $n=1$
  $M^1(e_2) = -e_1 + e_2$ => calculer précédemment VRAI

- On admet que $F^n(e_2) = -n e_1 + e_2$

- On vérifie par récurrence au rang $n+1$.

$F^n(e_2) = -n e_1 + e_2$

$F \times F^n(e_2) = f(-n e_1 + e_2) \Rightarrow F^{n+1}(e_2) = f(-n e_1 + e_2)$

$$F^{n+1}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -n+2 \\ -n+1 \\ -n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n+1 \\ -n \\ -n+2+3n-3-3n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n+1 \\ -n \\ -n-1 \end{pmatrix}$$

or $\begin{pmatrix} -n+1 \\ -n \\ -n-1 \end{pmatrix} = -(n+1)e_1 + e_2 = -(n+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -n+1 \\ -n \\ -n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n-1+2 \\ -n-1+1 \\ -n-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n+1 \\ -n \\ -n-1 \end{pmatrix}$$

donc $F^{n+1}(e_2) = -(n+1)e_1 + e_2$ est vérifiée.

b) $N^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & an^2+bn+c \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc on a $an^2+bn+c = 3$ pour $n=2$

$4a + 2b + c = 3$

$$N^3 = N^2 \times N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour $n=3 \rightarrow 9a + 3b + c = 6$

$$N^4 = N^3 \times N = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour $n=4 \rightarrow 16a + 4b + c = 10$

Avec 3 Equations

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \quad (1) \\ 9a + 3b + c = 6 \quad (2) \\ 16a + 4b + c = 10 \quad (3) \end{cases}$$

$(2) - (1) \Rightarrow 5a + b = 3$

$\rightarrow b = 3 - 5a$

$\rightarrow 4 \times a + 6 - 10a + c = 3$

$-6a + c = -3$

$c = -3 + 6a$

$(3)\ 16a + 4 \times (3 - 5a) - 3 + 6a = 10$

$16a - 20a + 6a = 10 - 12 + 3$

$2a = 1$

$a = 1/2 \qquad b = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \qquad c = 0$

$$\boxed{N^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0{,}5 \times n^2 + 0{,}5n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Question 4:

Comme $PNP^{-1} = M$

$PNP^{-1} \times PNP^{-1} = M \times M$

$M^n = \underbrace{PNP^{-1} \times PNP^{-1} \ldots \times PNP^{-1}}_{n \text{ fois}} \qquad$ or $PP^{-1} = 1$

Donc $M^n = P N^n P^{-1}$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \, {}^t\mathrm{com}\, P = \frac{1}{-1} \, {}^t\mathrm{com}\, P$$

$$\det P = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\mathrm{com}\, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t\mathrm{com}\, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -n & 0{,}5n^2+0{,}5n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & -n+2 & 0{,}5n^2+0{,}5n-2n+1 \\ 1 & -n+1 & 0{,}5n^2+0{,}5n-n \\ 1 & -n & 0{,}5n^2+0{,}5n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & -n+2 & 0{,}5n^2-1{,}5n+1 \\ 1 & -n+1 & 0{,}5n^2-0{,}5n \\ 1 & -n & 0{,}5n^2+0{,}5n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 0{,}5n^2-1{,}5n+1 & -n+2-2\times(0{,}5n^2-1{,}5n+1) & 1+n-2+0{,}5n^2-1{,}5n+1 \\ 0{,}5n^2-0{,}5n & -n+1-2\times(0{,}5n^2-0{,}5n) & 1+n-1+0{,}5n^2-0{,}5n \\ 0{,}5n^2+0{,}5n & -n-2\times(0{,}5n^2+0{,}5n) & 1+n+0{,}5n^2+0{,}5n \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 0{,}5n^2-1{,}5n+1 & -n^2+2n & 0{,}5n^2-0{,}5n \\ 0{,}5n^2-0{,}5n & -n^2+1 & 0{,}5n^2+0{,}5n \\ 0{,}5n^2+0{,}5n & -n^2-2n & 0{,}5n^2+1{,}5n+1 \end{pmatrix}$$

Problème I :

Question 1

1a) P est un arc de cercle :

l'arche a un rayon de 20m : $r = \sqrt{x^2+y^2} = 20$

$\cancel{r^2 = x^2+y^2 = 20^2 \Rightarrow y^2 = 20^2 - x^2 = 20^2\left(1-\frac{x^2}{20^2}\right)}$

$\cancel{y = 20\times\sqrt{1-\frac{x^2}{20^2}} = 20}$

$r^2 = x^2 + \left(-\frac{1}{20}x+20\right)^2 = x^2+20^2+2\times20\times\left(-\frac{1}{20}x\right)+\frac{1}{40}x^2$

$r^2 = x^2+20^2-2x+\frac{1}{40}x^2$

b) $x \in [10;15]$

Aire de MNPQ revient à intégrer le rectangle de $-x$ à x avec la longueur $= 2x$ et la hauteur $y = -\frac{1}{20}x^2+20$

$$\boxed{\text{Aire de MNPQ} = 2x\times\left(-\frac{1}{20}x^2+20\right) = -\frac{1}{10}x^3+40x}$$

Question 2 :

Soit $f(x) = -\frac{1}{10}x^3+40x$

2a) $f'(x) = -\frac{3}{10}x^2+40$

$f'(x) < 0$ si $-\frac{3x^2}{10} + 40 = 0 \to ax^2 + bx + c = 0$

avec $a = \frac{-3}{10}$ $b = 0$ $c = 40$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \times 40 \times \frac{-3}{10} = 48$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+\sqrt{48}}{-6/10} = -\frac{\sqrt{48}\times 10}{6}$ $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{48}\times 10}{6} = \sqrt{48}\times\frac{5}{3} \simeq 11{,}54$

x_1 est en dehors du domaine mais $x_2 \in [10 ; 15]$

donc $f'(x)$ est du signe de a $(-)$ en dehors de $\left[-\sqrt{48}\times\frac{5}{3} ; \sqrt{48}\times\frac{5}{3}\right]$

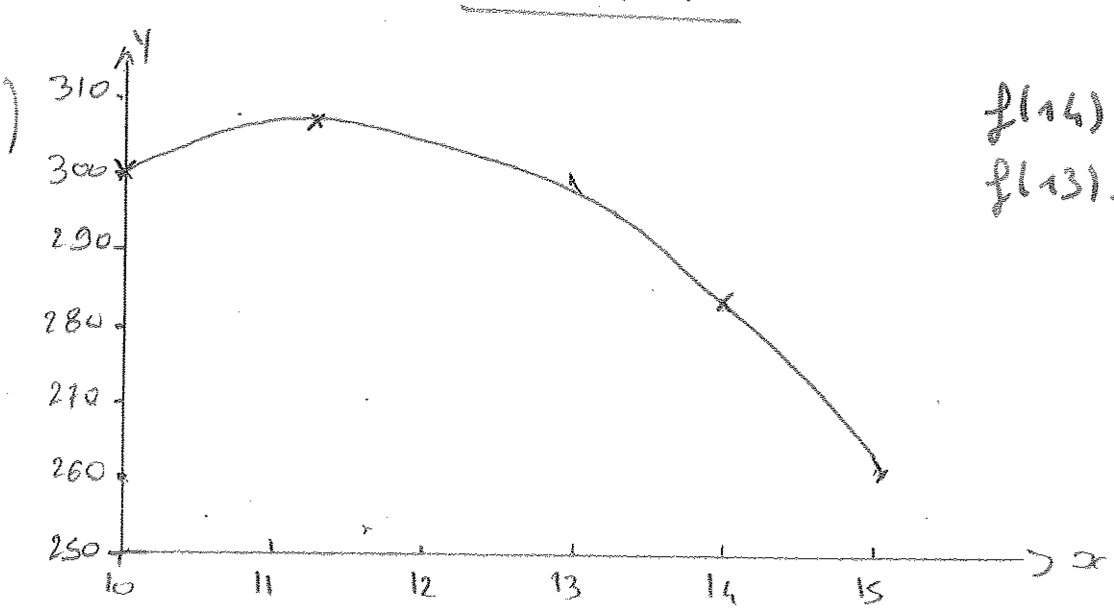
x	10		$\sqrt{48}\times\frac{5}{3} = 11{,}54$		15
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	300	↗	307,92	↘	262,5

$f(10) = -\frac{10^3}{10} + 40 \times 10 = 300$ $f(15) = -\frac{15^3}{10} + 40 \times 15 = 262{,}5$

$f(x)$ est max pour $x = \sqrt{48}\times\frac{5}{3}$ soit $f(x) \simeq 307{,}92$

$x \simeq 11{,}54$

2b)



$f(14) = 285{,}60$

$f(13) = 300{,}3)$

Question 3 :

a) Le rideau le plus économique correspond à l'aire la plus faible soit $x = 15m$, mais correspond à la poutre la plus grande $[MN] = 2 \cdot x = 30m$ il faut 262,5 m² de toile.

b) Le rideau le plus efficace est celui ayant l'aire maximum pour $x = 11,54m$ soit $[MN] : 2x = 23,08m$ pour une surface de $307,92 m^2$ en toile.